Méth. Mat. Phys. - Chapitre 13

Analyse géométrique

EPFL

- **Gradient :** vecteur $\boldsymbol{v}$

$$(13.3)$$

  1. **Divergence :** $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$
  2. **Rotationnel :** $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v}$

- **Dualité :** bivecteur $\leftrightarrow$ pseudovecteur

$$(13.7)$$

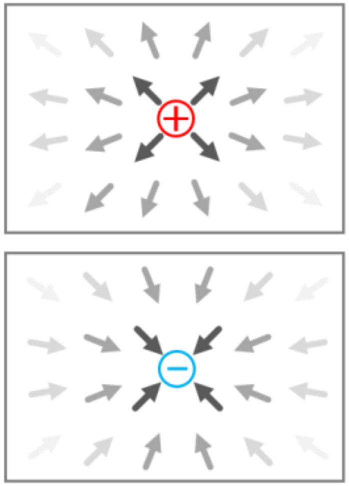
- **Gradient :** bivecteur $\boldsymbol{B}$

$$(13.4)$$

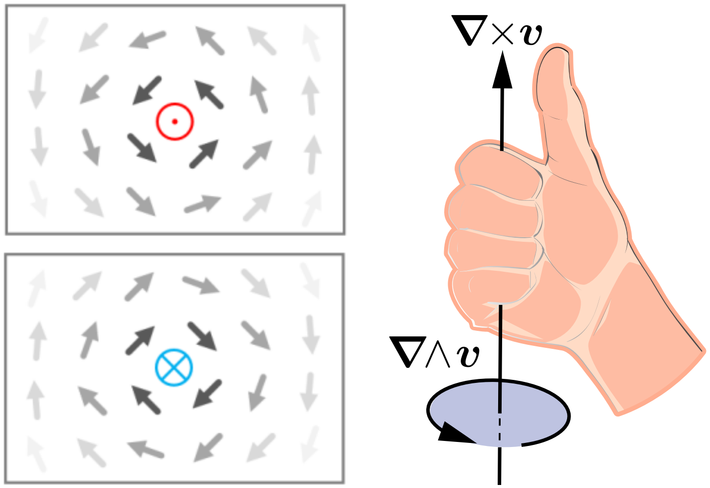
- **Gradient :** multivecteur M

$$\boldsymbol{\nabla}\, M = \boldsymbol{\nabla} \cdot M + \boldsymbol{\nabla} \wedge M \qquad (13.5)$$

1. **Divergence :** charges
champ électrique



2. **Rotationnel :** courants
champ magnétique



- **Identités duales de vecteurs:** (12.43) et (12.46) où $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}$

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})^{*} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v}^{*}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v})^{*} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}^{*} \tag{13.9}$$

- **Identité hybride :** (13.7) et (13.9)

$$\tag{13.7}$$

- **Identités duales de bivecteurs :** (12.49) et (12.52) où $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}$

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})^{*} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}^{*}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B})^{*} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}^{*} \tag{13.11}$$

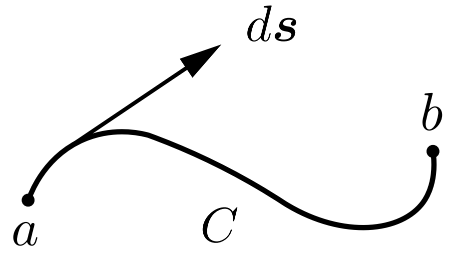
- **Identités hybrides :** (13.7) et (13.11)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v})^{*} = (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v})^{*} = 0 \tag{13.12}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v})^{*} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left((\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v})^{*}\right)^{*} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v})$$

- **Intégrale de Riemann :** scalaire f

$$\tag{13.14}$$



- **Notation :**

$$df = f\, d^0\boldsymbol{x} \qquad \text{et} \qquad d\boldsymbol{s} = d^1\boldsymbol{x} \tag{13.16}$$

- **Identités algébriques :** courbe $C = [a, b]$ dimension 1

$$\int_a^b f'(x)\, dx = \int_C d\boldsymbol{s} \cdot \frac{df}{d\boldsymbol{s}} = \int_C d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \int_C d^1\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} f \tag{13.15}$$

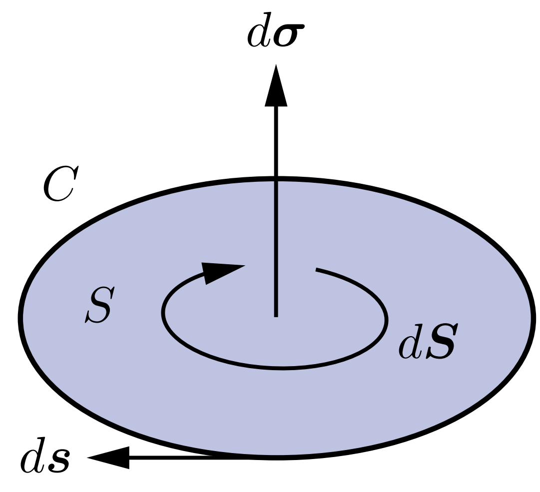
$$\int_a^b f'(x)\, dx = \int_a^b dx\, \frac{df}{dx} = \int_{f(a)}^{f(b)} df = \int_{\partial C} d^0\boldsymbol{x}\, f \tag{13.17}$$

- **Théorème du gradient :** scalaire f

$$\tag{13.18}$$

- **Théorème du rotationnel :** vecteur $\boldsymbol{f}$

$$(13.19)$$



- **Dualité :** pseudovecteur et bivecteur

$$d\boldsymbol{\sigma}^* = d\boldsymbol{S} \qquad \text{ainsi} \qquad d\boldsymbol{\sigma} = -\,d\boldsymbol{S}^* \qquad (13.20)$$

- **Notation :** où $|d\boldsymbol{\sigma}| = |d\boldsymbol{S}|$ et $d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$

$$d\boldsymbol{S} = d^2\boldsymbol{x} \qquad \text{et} \qquad d\boldsymbol{s} = d^1\boldsymbol{x} \qquad (13.23)$$

- **Identité algébrique :** scalaire : espace 3D

$$\iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{f}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\iint_S (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{f})^* \cdot d\boldsymbol{S}^* = -\iint_S \left((\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{f})^* \wedge d\boldsymbol{S}\right)^*$$

$$= -\iint_S \left(d\boldsymbol{S} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{f})^*\right)^* = -\iint_S d\boldsymbol{S} \cdot \left((\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{f})^*\right)^* \qquad (13.21)$$

$$= \iint_S d\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{f}) = \iint_S d^2\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{f})$$

- **Identité algébrique :** scalaire : $C = \partial S$

$$\oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{\partial S} d^1\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f} \tag{13.22}$$

- **Théorème du rotationnel :** vecteur $\boldsymbol{f}$: surface S

$$\tag{13.24}$$

- **Théorème du rotationnel :** $d\boldsymbol{x} \wedge (13.24)$ $d\boldsymbol{x} \cdot d^2\boldsymbol{x} = 0$ et $d\boldsymbol{x} \cdot d^1\boldsymbol{x} = 0$

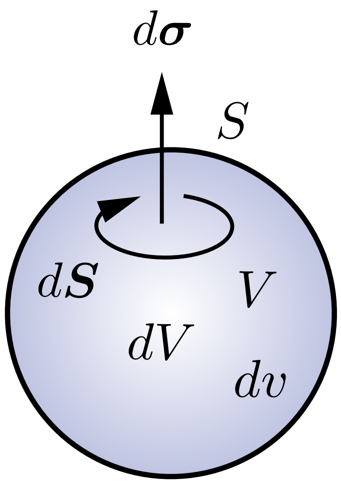
$$\iiint_V \left(d\boldsymbol{x} \wedge d^2\boldsymbol{x}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{f}\right) = \oiint_{\partial V} \left(d\boldsymbol{x} \wedge d^1\boldsymbol{x}\right) \cdot \boldsymbol{f} \tag{13.25}$$

- **Théorème du rotationnel :** vecteur $\boldsymbol{f}$: volume V

$$\tag{13.27}$$

- **Théorème de la divergence :** analyse vectorielle

$$(13.28)$$



- **Dualité :** pseudovecteur et bivecteur

$$dV = dv^* \qquad \text{et} \qquad d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{\sigma}^*$$

$$dv = -\,dV^* \qquad \text{et} \qquad d\boldsymbol{\sigma} = -\,d\boldsymbol{S}^* \qquad (13.29)$$

$$dV = d^3\boldsymbol{x} \qquad \text{et} \qquad d\boldsymbol{S} = d^2\boldsymbol{x}$$

- **Identité algébrique :** scalaire : espace 3D

$$\iiint_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f})\,dv = -\iiint_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f})\,dV^* = -\iiint_V \left(dV\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f})\right)^*$$

$$= -\iiint_V \left(d^3\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f}\right)^* \qquad (13.30)$$

- **Identité algébrique :** scalaire : $S = \partial V$

$$\oiint_S \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \oiint_{\partial V} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}^* = - \oiint_{\partial V} (\boldsymbol{f} \wedge d\boldsymbol{S})^* \tag{13.31}$$

$$= - \oiint_{\partial V} (d\boldsymbol{S} \wedge \boldsymbol{f})^* = - \oiint_{\partial V} \left(d^2\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{f}\right)^*$$

- **Théorème de la divergence :** version duale : vecteur $\boldsymbol{f}$

$$\tag{13.32}$$

- **Théorème de la divergence :** (13.32) $d\boldsymbol{x} \cdot d^1\boldsymbol{x} = 0$ et $d\boldsymbol{x} \cdot d^2\boldsymbol{x} = 0$

$$\iiint_V d\boldsymbol{x} \wedge d^2\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f} = \oiint_{\partial V} d\boldsymbol{x} \wedge d^1\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{f} \tag{13.33}$$

- **Théorème de la divergence :** vecteur $\boldsymbol{f}$: surface S

$$\tag{13.34}$$

- **Théorème de la divergence et du rotationnel :** surface S

$$\iint_S d^2\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f} = \oint_{\partial S} d^1\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{f} \tag{13.34}$$

$$\iint_S d^2\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{f}) = \oint_{\partial S} d^1\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f} \tag{13.24}$$

- **Théorème du gradient :** surface S : $(13.34) + (13.24)$

$$(13.36)$$

- **Théorème de la divergence et du rotationnel :** volume V

$$\iiint_V d^3\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f} = \oiint_{\partial V} d^2\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{f} \tag{13.32}$$

$$\iiint_V d^3\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{f}) = \oiint_{\partial V} d^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f} \tag{13.27}$$

- **Théorème du gradient :** volume V : $(13.32) + (13.27)$

$$(13.38)$$

- **Théorème du gradient :** dimension $n = 1$: multivecteur F

$$\int_{C} d^{1}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, F = \int_{\partial C} d^{0}\boldsymbol{x}\, F \tag{13.39}$$

Hypersurface régulière : courbe C

- **Théorème du gradient :** dimension $n = 2$: multivecteur F

$$\iint_{S} d^{2}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, F = \oint_{\partial S} d^{1}\boldsymbol{x}\, F \tag{13.40}$$

Hypersurface régulière : surface S

- **Théorème du gradient :** dimension $n = 3$: multivecteur F

$$\iiint_{V} d^{3}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, F = \oiint_{\partial V} d^{2}\boldsymbol{x}\, F \tag{13.41}$$

Hypersurface régulière : volume V

- **Théorème fondamental de l'intégration :** analyse géométrique

$$\tag{13.42}$$

Hypersurface régulière : variété (manifold) M : dimensions $n = 1, 2, 3$

- **Pseudoscalaire :** plan 2D : base orthonormée $\{\hat{\boldsymbol{e}}_x, \hat{\boldsymbol{e}}_y\}$

$$I = \hat{\boldsymbol{e}}_x \, \hat{\boldsymbol{e}}_y \qquad \text{ainsi} \qquad I^2 = \hat{\boldsymbol{e}}_x \, \hat{\boldsymbol{e}}_y \, \hat{\boldsymbol{e}}_x \, \hat{\boldsymbol{e}}_y = -\, \hat{\boldsymbol{e}}_x \, \hat{\boldsymbol{e}}_x \, \hat{\boldsymbol{e}}_y \, \hat{\boldsymbol{e}}_y = -\, 1 \tag{13.43}$$

- **Gradient :** opérateur différentiel vectoriel

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \, \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{e}}_y \, \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.44}$$

- **Multivecteur pair :** plan 2D : nombre complexe en algèbre géométrique

$$F = u + I \, v = u + v \, \hat{\boldsymbol{e}}_x \, \hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{13.45}$$

- **Gradient du multivecteur pair :** (13.44) et (13.45)

$$\boldsymbol{\nabla} \, F = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{13.46}$$

- **Equations de Cauchy Riemann :** $F \, (Z) = u + I \, v$ où $Z = x + I \, y$

$$\tag{13.47}$$

- **Fonction holomorphe :** $F = F \, (Z)$ satisfait (13.47) : équipotentielle

$$\tag{13.48}$$

- **Théorème fondamental :** fonction holomorphe (13.48) dans (13.42)

$$\int_S d^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,F = \oint_C d^1\boldsymbol{x}\,F = 0 \qquad \text{où} \qquad S\subset\mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \partial S = C \qquad (13.49)$$

- **Théorème fondamental :** $\boldsymbol{u}\,(13.49)$ où $\boldsymbol{u} = \textbf{cste}$ et $d^1\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{v}$

$$\oint_C \boldsymbol{u}\,d^1\boldsymbol{x}\,F = \oint_C \boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{v}\,F = \oint_C d\,(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\,F = 0 \qquad (13.50)$$

- **Produit géométrique :** nombre complexe

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v} = x + I\,y = Z \qquad (13.51)$$

- **Théorème de Cauchy :** (13.51) dans (13.50) où $F = F\,(Z)$

$$(13.52)$$

- **Théorème des résidus :** (13.52) fonction $F\,(Z)$ non holomorphe

$$(13.53)$$

- **Equations de Maxwell :** calcul vectoriel

$$\nabla \cdot \boldsymbol{d} = \rho \tag{13.54}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{b} = 0 \tag{13.55}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{e} = -\,\partial_t\,\boldsymbol{b} \tag{13.56}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{h} = \partial_t\,\boldsymbol{d} + \boldsymbol{j} \tag{13.57}$$

- **Equations constitutives :** vide

$$\boldsymbol{d} = \varepsilon_0\,\boldsymbol{e} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b} = \mu_0\,\boldsymbol{h} \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_0\,\mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{13.58}$$

- **Equations de Maxwell :** vide : calcul vectoriel

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{13.60}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{b} = 0 \tag{13.61}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{e} = -\,\partial_t\,\boldsymbol{b} \tag{13.62}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{b} = \frac{1}{c^2}\left(\partial_t\,\boldsymbol{e} + \frac{1}{\varepsilon_0}\,\boldsymbol{j}\right) \tag{13.63}$$

- **Vecteur de Riemann-Silberstein :** champ électromagnétique complexe

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e} + i\,c\,\boldsymbol{b} \tag{13.64}$$

- **Multivecteur champ électromagnétique :**

$$F = \boldsymbol{e} + I\,c\,\boldsymbol{b} \tag{13.65}$$

- **Bivecteur champ magnétique :** dual du vecteur champ magnétique

$$\boldsymbol{B} = -\,\boldsymbol{b}^{*} = -\,\boldsymbol{b}\,I^{-1} = \boldsymbol{b}\,I = I\,\boldsymbol{b} \qquad \text{ainsi} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}^{*} \tag{13.66}$$

- **Multivecteur champ électromagnétique :**

$$\tag{13.67}$$

- **Identités algébriques :** (13.7), (13.9), (13.11) et (13.66)

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{b})^{*} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{b}^{*} = -\,\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}^{*} = (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B})^{*} \tag{13.68}$$

- **Loi d'Ampère-Maxwell :** (13.68) dans (13.63)

$$(13.70)$$

- **Loi de Faraday :** (13.62)

$$\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{e}\right)^{*}=-\,\partial_{t}\,\boldsymbol{B}^{*}\qquad(13.71)$$

- **Loi de Faraday :** duale

$$(13.74)$$

- **Loi de Gauss magnétique :** (13.68) dans (13.61)

$$\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B}\right)^{*}=0\qquad(13.69)$$

- **Loi de Gauss magnétique :** duale

$$(13.75)$$

- **Equations de Maxwell :** vide : algèbre géométrique

dimension 0 (13.72)

dimension 1 (13.73)

dimension 2 (13.74)

dimension 3 (13.75)

- **Equations de Maxwell :** vide : champ électromagnétique

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot F = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{e} + c\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{c\,\varepsilon_0}\left(c\rho - \boldsymbol{j}\right) - \frac{1}{c}\,\partial_t\,\boldsymbol{e} \tag{13.76}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge F = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{e} + c\,\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B} = -\,\partial_t\,\boldsymbol{B} \tag{13.77}$$

- **Gradient :** champ électromagnétique

$$\boldsymbol{\nabla}\,F = \boldsymbol{\nabla}\cdot F + \boldsymbol{\nabla}\wedge F = \frac{1}{c\,\varepsilon_0}\left(c\rho - \boldsymbol{j}\right) - \frac{1}{c}\left(\partial_t\,\boldsymbol{e} + c\,\partial_t\,\boldsymbol{B}\right) \tag{13.78}$$

- **Dérivée temporelle :** champ électromagnétique

$$\partial_t \, F = \partial_t \, \boldsymbol{e} + c \, \partial_t \, \boldsymbol{B} \tag{13.79}$$

- **Equation de Maxwell :** vide (13.79) dans (13.78)

$$\tag{13.80}$$

- **Identité algébrique :** (13.81)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) = - \, \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{b}^*) = - \, \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{b})^* = - \, (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{b})^* = 0$$

- **Identité :** équations d'Ampère-Maxwell et de Gauss (13.82)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) = - \, \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} + \partial_t \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{e} \right) = - \, \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \, (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} + \partial_t \, \rho)$$

- **Equation de continuité électrique :**

$$\tag{13.83}$$

- **Equation d'onde électromagnétique :** (13.80)

$$\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{1}{c}\,\partial_t\right)\left(\boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{c}\,\partial_t\right)(\varepsilon_0\,F) = \left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{1}{c}\,\partial_t\right)\frac{1}{c}\,(c\rho - \boldsymbol{j}) \qquad (13.84)$$

- **Identités algébriques :** les opérateurs $\boldsymbol{\nabla}$ et ∂_t commutent

$$\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{1}{c}\,\partial_t\right)\left(\boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{c}\,\partial_t\right) = \boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 \qquad (13.85)$$

$$\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{1}{c}\,\partial_t\right)\frac{1}{c}\,(c\rho - \boldsymbol{j}) =$$

$$= \boldsymbol{\nabla}\,\rho - \frac{1}{c}\,(\partial_t\,\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}) - \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\,\partial_t\,\boldsymbol{j} \qquad (13.86)$$

$$= \boldsymbol{\nabla}\,\rho - \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\,\partial_t\,\boldsymbol{j}$$

- **Equation d'onde électromagnétique :** ρ et $\boldsymbol{j}$

$$(13.89)$$

- **Equation d'onde électromagnétique :** vide : $\rho = 0$ et $\boldsymbol{j} = 0$

$$(\varepsilon_0 \, F) = 0 \tag{13.91}$$

- **Densité de force de Lorentz :** calcul vectoriel

$$\boldsymbol{f} = \rho \, \boldsymbol{e} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{b} \tag{13.92}$$

- **Identité vectorielle :**

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{b})^* = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{b}^* = -\,\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{j} \tag{13.93}$$

- **Densité de force de Lorentz :** algèbre géométrique

$$\tag{13.94}$$